数理解析研究所講究録
第 1666 巻 2009 年 14-22

代数方程式の折紙による解法について

森継 修一
SHUICHI MORITSUGU*
筑波大学大学院 図書館情報メディア研究科
GRADUATE SCHOOL OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA STUDIES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

中村 怜子
SATOKO NAKAMURA†
筑波大学大学院 図書館情報メディア研究科
GRADUATE SCHOOL OF LIBRARY, INFORMATION AND MEDIA STUDIES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

1 はじめに

以前の論文 [20] で「一般の実係数3次方程式の折紙による解法」を論じたことを踏まえて，本稿では,「4次以上の方程式の解法の折紙による表現」について検討を加える．なお本稿は，第2著者の修士論文 [21] に基づいて，内容を整理したものである．

以下の3題は，ユークリッド幾何における作図不可能問題 [23] として古くから知られ，いずれも 19 世紀に完全な証明が与えられた．

1.	角の三等分	→	P.L.Wantzel (1837)
2.	立方体倍積	→	(〃)
3.	円積問題	→	C.L.Lindemann (1882)

この中で,「角の三等分」「立方体倍積」は3次方程式を解くことに対応しているため，ユークリッド幾何における「定木とコンパスによる作図」では実行不可能である．これに対し阿部恒 [1] は,「角の三等分」「立方体倍積（$=\sqrt[3]{2}$ の作図)」が折紙を用いると実行可能であることを 1980 年頃から相次いで発表した．阿部の方法は,「与えられた2点を，別々の2直線に同時に重ねるように折る」操作に基づいており，阿部はこれを「3次元折り」と称した．この折り方は，従来の「作品のための折紙」には使われなかった操作である．

一方で，折紙の数理的側面に対する研究が進み，専門の国際会議（第1回 1989 年，第2回 1994 年，第3回 2001 年 [2]，第4回 2006 年）も開かれるようになった．特に，1989 年の第1回会議では,「折紙による3次方程式の解法の可能性」を M.P.Beloch[4] が 1930 年代にすでに指摘していたことも明らかにされた．以後,「角の三等分」を含む3次方程式の折紙による解法については，藤田文章 (H.Huzita)[15][16]・R.Geretschläger[11]・羽鳥公士郎 (K.Hatori)[13] らによる研究があり，そこでは主として,「2つの放物線の共通接線を用いる」という幾何学的解釈から，点の配置を導出して作図法の証明を与えている．これに対して，本稿著者 [20] は，作図法の代数的証明に重点を置き，グレブナー基底 [5] に基づく幾何定理の証明の技法 [6][7] を適用した．

*moritsug@slis.tsukuba.ac.jp
†snaka@slis.tsukuba.ac.jp

３次方程式に関しては，以上の研究において，その実数解（1 個または 3 個）の作図法はほぼ完全に解明されている．次に 4 次方程式については，Ferrari の公式 [24] などにより 3 次方程式を補助的に解くことに帰着されるので，原理的に折紙で作図可能であることは明らかであるが，具体的な折り方について公刊された文献は少ないものと思われる．特に 4 次方程式の場合は，実数解が 0,2,4 個と 3 とおりの場合があり，状況を複雑にしている．本稿では，与えられた 4 次方程式に対してガロア群を計算することにより，その分類を試みる．また，5 次方程式に対して，multiple fold（同時に複数の折り目を折る手法）を用いた解法も提案されてきているので，これについても検討を加えることとする．

2 Huzita-(Justin)-Hatori による折紙の公理系

藤田 [14] は，折紙操作の幾何学的意味を下記の (1)〜(6) の公理にまとめた．その後，これらとは独立な公理 (7) を 2001 年に羽鳥が発見したが，実際にはすでに Justin[17] が指摘していたことが判明した．

(1) 与えられた 2 点 p_1, p_2 を通る直線が折れる．
(2) 与えられた 2 点 p_1, p_2 について，p_1 を p_2 に重ねるように折れる．
(3) 与えられた 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 について，ℓ_1 を ℓ_2 に重ねるように折れる．
(4) 与えられた点 p と直線 ℓ について，「p を通り ℓ に垂直な直線」が折れる．
(5) 与えられた 2 点 p_1, p_2 と直線 ℓ について，「p_2 を通り，p_1 を ℓ 上に重ねる直線」が折れる．
(6) 与えられた 2 点 p_1, p_2 と 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 について，「p_1 を ℓ_1 上に，p_2 を ℓ_2 上に同時に重ねる直線」が折れる．
(7) 与えられた点 p と 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 について，「p を ℓ_1 上に重ね，ℓ_2 に垂直な直線」が折れる．

これらの公理のうち，(6)（阿部による「3 次元折り」に相当）のみ 3 次方程式に対応し，定木とコンパスでは作図できない．single fold（一度に一本の折り目で折る手法）で作図可能な問題に関しては，この 7 つの公理で完全であることを Lang[18] が証明し，「single fold で解ける方程式は 4 次以下」であることが確認されている．

3 ３次方程式の解法 (review)

阿部による立方体倍積問題の解法は，3 次方程式 $t^3 - 2 = 0$ の解法を折紙で表現したものと解釈できる．これを拡張し，一般の 3 次方程式 $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ の解法を折紙で表現するには，各係数から以下のような点配置と作図を行えばよい [20].

初期配置 与えられた方程式の係数から，xy 平面上に 3 点 $A(-1, a)$, $B(-b, c)$, $R(0, a)$ をとる．図 1 は $c < 0$ の場合を表し，$c > 0$ の場合は天地を入れ換えた配置となる．

作図手順 (i) 2 直線 $x = 1, y = -c$ を折る．

(ii) A が $x = 1$ 上に，B が $y = -c$ 上に乗るように折れ．

(iii) AA' の中点を P とすると，$\overrightarrow{RP}$ が与えられた 3 次方程式のひとつの実数解を表す．

座標の関係を多項式で表現し，グレブナー基底によるイデアル所属問題として解くと，以下のような代数的証明が得られる．

幾何学的条件
- $A(-1, a)$ は $A'(1, a + 2y)$ に写される（y を未知数とする）．
- $B(-b, c)$ は $B'(x, -c)$ に写される（x を未知数とする）．
- $\begin{cases} P(0, a + y) & \cdots \ AA' \text{の中点} \\ Q((x - b)/2, 0) & \cdots \ BB' \text{の中点} \end{cases}$ とすると，折り目 PQ に関して $AA' \perp PQ$ ．

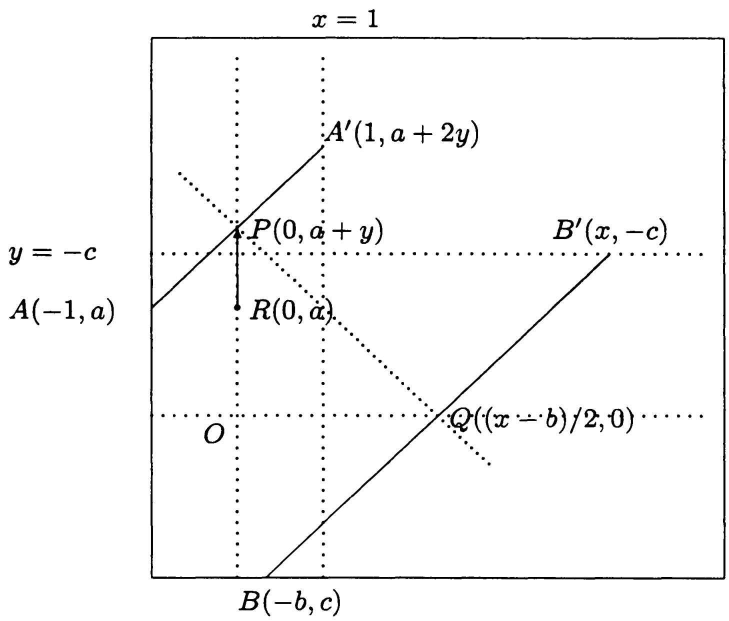

図 1: 3 次方程式 $t^3+at^2+bt+c=0$ の解 $\overrightarrow{RP}$

結論 $\overrightarrow{RP}\,(=y)$ は $t^3+at^2+bt+c=0$ の（一つの）解.

証明 (1) 幾何学的条件を多項式表現に翻訳する.

$$AB = A'B' \quad\Rightarrow\quad f_1 := -x^2+2x-4y^2-4(a+c)y+b^2-2b-4ac,$$
$$AA' \parallel BB' \quad\Rightarrow\quad f_2 := xy+by+2c,$$
$$AA' \perp PQ \quad\Rightarrow\quad f_3 := -x+2y^2+2ay+b.$$

(2) 証明すべき結論 $p := y^3+ay^2+by+c$.

(3) $J=(f_1,f_2,f_3)\subset \mathbf{Q}(a,b,c)[x,y]$ のグレブナー基底を任意の項順序で計算することにより，$p\in J$ を得る．すなわち，一つの実数解 $\overrightarrow{RP}$ が作図された.

∎

実係数 3 次方程式は 1 個または 3 個の実根を持つが，これを上記の方法で折紙で作図すると，

実根 1 個 $\Longleftrightarrow$ 折り方が 1 とおり
実根 3 個 $\Longleftrightarrow$ 折り方が 3 とおり

と対応し，全ての実根が折紙上に表現される．この分類を，実際に作図してみることなく，代数的に判定する方法について考える.

簡約された形の既約 3 次式 $f(x)=x^3+ax+b\quad(a,b\in\mathbf{Q})$ の判別式は $D=-4a^3-27b^2$ で与えられる．このとき，$f(x)$ のガロア群 G と実根の個数の関係は以下のようになる [22].

(i) $D<0 \Leftrightarrow f(x)$ はただ 1 個の実根を持つ．このとき $G\cong S_3$.

(ii) $D>0 \Leftrightarrow f(x)$ は 3 個の実根を持つ．このとき $\sqrt{D}\in\mathbf{Q}\Rightarrow G\cong \mathbf{Z}_3$ または $\sqrt{D}\notin\mathbf{Q}\Rightarrow G\cong S_3$.

すなわち，$\mathbf{Q}$ 上既約な 3 次式の実根の個数は判別式のみで分類可能である．ガロア群から先に見ると，$\mathbf{Z}_3$ の場合は 3 実根になるが，S_3 の場合は実根が 1 個のことも 3 個のこともあり，分類には判別式が必要になる.

4　4次方程式の解法

4.1　ガロア群による4次方程式の分類

表 1: 4次方程式のガロア群／実数根の個数による分類（該当例）

ガロア群	m	実数根0個	実数根2個	実数根4個
S_4 (4T5)	$6\ (D>0)$	x^4+x^2+x+1	×	x^4-4x^2+x+1
	$6\ (D<0)$	×	x^4-x-1	×
A_4 (4T4)	3	$x^4+3x+9/4$	×	x^4-7x^2+3x+1
V (4T2)	1	x^4+3x^2+9	×	x^4-10x^2+1
D_8 (4T3)	$2\ (D>0)$	x^4-4x^2+5	×	$x^4-4x^2+7/2$
	$2\ (D<0)$	×	x^4+x^2-1	×
$\mathbf{Z}_4$ (4T1)	2	x^4+4x^2+2	×	x^4-4x^2+2

4T1 ～ 4T5: Maple の関数 galois が出力するラベル
×: 理論上起こらない組合せ

4次方程式を折紙で解くための前段階として，前節と同様の方法で，実数根の個数による分類を試みる．簡約された形の既約4次式 $f(x)=x^4+qx^2+rx+s \quad (q,r,s\in\mathbf{Q})$ の4根 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ に対し，

$$\begin{aligned} u &= (\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_3+\alpha_4) \\ v &= (\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_2+\alpha_4) \\ w &= (\alpha_1+\alpha_4)(\alpha_2+\alpha_3) \end{aligned}$$

とおき，$f(x)$ の3次分解式を $g(x)=(x-u)(x-v)(x-w)$ で定義する．このとき，

$$g(x)=x^3-2qx^2+(q^2-4s)x+r^2$$

であり，$g(x)$ の判別式 D は $f(x)$ の判別式に一致する．さらに，$g(x)$ のガロア群の位数を m，$g(x)$ の最小分解体を K_0 とするとき，$f(x)$ のガロア群 G は以下のように分類される [10][22].

(i) $m=6 \Rightarrow G \cong S_4$

(ii) $m=3 \Rightarrow G \cong A_4$

(iii) $m=1 \Rightarrow G \cong V$

(iv) $m=2 \Rightarrow \begin{cases} G \cong D_8 & \cdots\ f(x) \text{ が } K_0(x) \text{ で既約のとき} \\ G \cong \mathbf{Z}_4 & \cdots\ f(x) \text{ が } K_0(x) \text{ で可約のとき} \end{cases}$

一方，実係数の4次方程式の実根は0，2，4個のいずれかである．ガロア群による分類と実根の個数の関係について，起こらない組合せがいくつか知られており，それら以外について具体例を Maple12[19] で計算した結果を表1に示す．この表において，ガロア群が $A_4, V, \mathbf{Z}_4$ の場合には判別式 $D>0$ に限られるので，結果的に

$$D<0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{実数根2個}$$

と結論付けられるが，$D>0$ の場合には，実数根が0個か4個かをガロア群による分類だけから決定することはできない．

4.2 Edwards & Shurman による解法

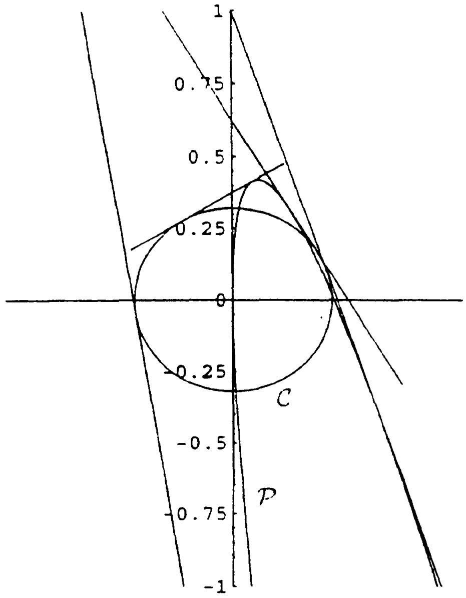

図 2: 4 次方程式の解法例

§3 で示した「折紙による 3 次方程式の解法」は，その幾何学的意味から次の命題 1 のように解釈される．Edwards & Shurman[9] はこの考え方を拡張して，4 次方程式の解の折紙による表現（命題 2,3）を得た．

命題 1

3 次方程式 $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ の解は，

$$\begin{cases} P_1: & (y+c)^2 = -4d(x-b) \\ P_2: & x^2 = -4y \end{cases}$$

という 2 つの放物線の共通接線 $y = kx + \ell$ の傾き k である．(すなわち $k^3 + bk^2 + ck + d = 0$ が成り立つ.)

命題 2

4 次方程式 $x^4 + bx^2 + 2cx + d = 0$, $(c^2 - bd < 0,\ d < 0)$ .... $(\heartsuit)$
が与えられたとする．このとき，

$$\begin{cases} C: & dx^2 + 2cxy + by^2 + bd - c^2 = 0 \\ P_2: & x^2 = -4y \end{cases}$$

という 2 つの 2 次曲線の共通接線 $y = kx + \ell$ を引くと，k は $(\heartsuit)$ の解になる．(すなわち $k^4 + bk^2 + 2ck + d = 0$ が成り立つ.)

C は放物線ではないため，接線の一般的な折り方が不明である．そこで以下のように再定式化を図る．

命題 3

方程式 $(\heartsuit)$ の各係数から

$$e = \pm\frac{\sqrt{bd - c^2}}{d} \text{（一方の値をとる）} \qquad r = |e|\sqrt{-d}$$

を求め，

$$
\begin{cases}
C: & x^2 + y^2 = r^2 \\
P: & c^2x^2 - 2cdexy + d^2e^2y^2 - 4d^2ex = 0 \\
 & \qquad (e, r \text{ は } de^2 = -r^2 = (bd - c^2)/d \text{ をみたす})
\end{cases}
$$

という円 C と放物線 P の共通接線 $y = kx + \ell$ を引くと，ℓ は $(\heartsuit)$ の解になる．(すなわち $\ell^4 + b\ell^2 + 2c\ell + d = 0$ が成り立つ.)

放物線 P の焦点・準線を求めるために，さらに変数変換が必要であるが，最終的に,「円と放物線の共通接線」は single fold で作図可能なので，4次方程式の解法を折紙で表現できたことになる．図2は，計算例

$$
q(x) \; = \; x^4 - \frac{177}{64}x^2 + \frac{143}{64}x - \frac{15}{32} \; = \; \left(x - \frac{3}{8}\right)\left(x - \frac{5}{8}\right)(x-1)(x+2)
$$

に対する作図を [9] から引用したものである．このとき，

$$
\begin{cases}
C: & x^2 + y^2 = \dfrac{791}{7680} \quad (\; \approx \; 0.320928^2) \\
P: & \dfrac{20449}{16384}x^2 + \dfrac{143\sqrt{791}}{8192}xy + \dfrac{791}{16384}y^2 - \dfrac{15\sqrt{791}}{1024}x = 0
\end{cases}
$$

であり，放物線 P の焦点は

$$
\left(\frac{91345101271\sqrt{791}}{31536804003840}, \; \frac{12416537368807}{31536804003840}\right) \; \approx \; (0.081462, \; 0.393716)
$$

準線の方程式は

$$
y = \frac{\sqrt{791}}{143}x + \frac{91345101271}{212324057088} \quad \approx \quad y = 0.196676x + 0.430216
$$

で与えられる．なお4次方程式 $(\heartsuit)$ に付随する制約条件 $c^2 - bd < 0$, $d < 0$ は，命題3における構成法から，実数根をもつための十分条件ではあるが必要条件ではなく，また実数根の個数についても情報を与えるものかどうか現時点では不明である．

5　5次方程式の解法

Erik & Martin Demaine は2000年頃に,「Huzita-Hatori の公理を拡張して，multiple fold（同時に複数の折り目を折る手法）を導入すると，任意の次数の方程式を解くことが可能である」ことを示した [8]．以後，この原理は広く知られるようになったが，具体的な問題に適用した例はほとんど見られない．

ここでは，R.J.Lang による角の5等分の方法 [18] を検討する．図3に示す最終局面では，折目 AJ と点 X を通る折目とを同時に折り (double fold)，点 F' で3重に一致するように，点 C',F' を決めている．Lang 自身は証明を公開していないので，以下に2とおりの証明を与える．

初等幾何による証明

$XA = XF'$ から $\angle XFF' = \angle XF'F$ で，これを α とおく．
また，折り方から $\angle EFC' = \angle C'FF'$ で，これを β とおくと，$\angle EAX = 2\beta + \alpha$.
$\angle C'F'F = 90° - \alpha$, $\angle CFF' = 90° - \alpha$, $CF = C'F'$ より $CFF'C'$ は等脚台形で $CC' \parallel FF'$.
YF' は FC の垂直2等分線であることから，$\triangle CYF' \equiv \triangle FYF'$ となり，$\angle CF'Y = \alpha$.
したがって，$\triangle C'FF' \equiv \triangle CF'F$（二辺夾角）より $\beta = 2\alpha$.
以上のことから，$\angle EAX = 5\alpha$ すなわち $\angle F'AX = \dfrac{1}{5}\angle EAX$ を得る．∎

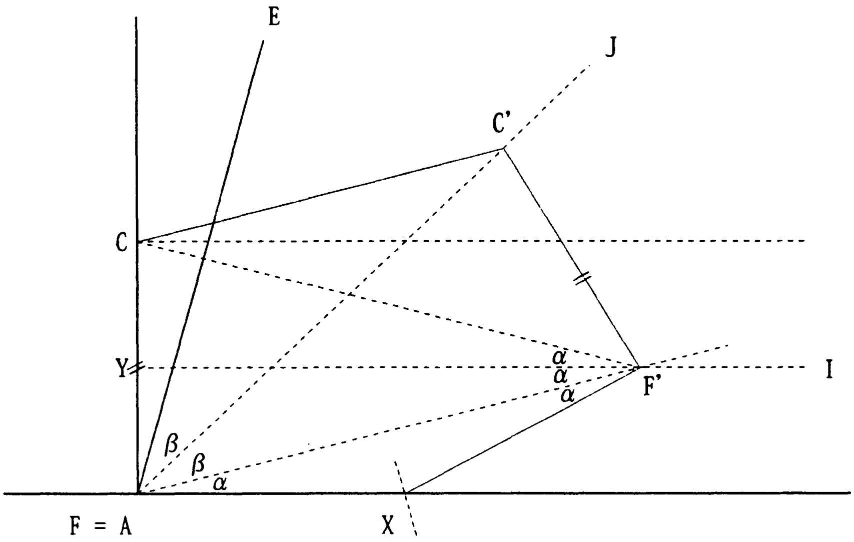

図 3: Lang による角の五等分

グレブナー基底による代数的証明

各点の座標を $A(0,0)$, $F(0,0)$, $Y(0,u_2)$, $C(0,2u_2)$, $F'(u_1,u_2)$, $C'(x_1,x_2)$ とする．
$CFF'C'$ が等脚台形であることから，

(1) $FC = F'C' \quad \Rightarrow \quad f_1 := 3u_2^2 - x_1^2 + 2u_1x_1 - u_1^2 - x_2^2 + 2u_2x_2,$

(2) $FF' \parallel CC' \quad \Rightarrow \quad f_2 := u_2x_1 - u_1x_2 + 2u_1u_2,$

(3) $\angle CFF' = \angle C'F'C \quad \Rightarrow \quad f_3 := -u_2^2x_1 + 2u_1u_2x_2 + u_1^2x_1 - u_1^3 - u_1u_2^2.$

一方で，証明すべき結論は $\beta = 2\alpha$ であり，2 倍角の公式 $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ から
$g := -3u_1^2u_2x_1 + u_2^3x_1 + u_1^3x_2 - 3u_1u_2^2x_2$ と表される．
これらの多項式に対して，任意の単項式順序でグレブナー基底を計算すると，$g \in (f_1, f_2, f_3)$ を得る．

∎

以上から分かるように，Lang の方法は,「角の 5 等分」とはいっても，与えられた角を $2\beta+\alpha$ に分割したうえで，$\beta = 2\alpha$ を証明することが本質になっている．したがって，証明のためには，実際には 2 倍角の公式（= 2 次式）までしか使っておらず,「5 次方程式を折紙で解いた例」と言い切れるかどうか微妙である．

これとは別に，F.Ghourabi, T.Ida, H.Takahashi [12] は，4 本の折り目を同時に折り (4-fold)，角を 5 等分する方法を示している．そこでは，$\tan\theta$ の 5 倍角の公式

$$\tan 5\theta = \frac{5\tan\theta - 10\tan^3\theta + \tan^5\theta}{1 - 10\tan^3\theta + 5\tan^4\theta}$$

を導いてその成立を示しているため，まさに「5 次方程式を折紙で解いた例」といえるが，一方で「5 次方程式を解くのに必要な最小の折り目は何本か」という点が新たに問題となる．

R.C.Alperin, R.J.Lang[3] は

定理 任意の n 次代数方程式の実根は，$(n-2)$-fold で解くことができる．

予想 n 次代数方程式がベキ根で可解ならば，$(n-2)$-fold 未満で解くことができる．

と述べ，$n=5$ に対する成立は未知であるとしている．$n=4$ の場合は，一般にベキ根で解くことが可能であり，実根があれば single fold で折れるので，予想は確かに成立している．これに対し，5次式については，

$$\text{既約な5次方程式がベキ根で可解} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ガロア群の位数} \leq 20$$

が成り立つ [22] ので，ガロア群を求めることにより，「2-fold で解ける」か「3-fold が必要」かの識別につながる可能性がある．ちなみに，$\cos\theta$ の5倍角の公式から導かれる5次式

$$f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x - \alpha \qquad (\alpha = \cos 5\theta,\ x = \cos\theta)$$

に対するガロア群の位数は，$f(x)$ が既約である限り，20 である．したがって，この $f(x)$ はベキ根で可解であり，角の5等分は原理的に 2-fold で折れることになって，上記の予想には反しないと解釈できる．

6 まとめと今後の課題

本稿においては，折紙による代数方程式の解法について，既発表の方法に検討を加えつつ，以下の点を述べた．それぞれの点について残された課題とともに記す．

- ガロア群による4次方程式の分類を試みた．
  実根の個数を事前に知ることにより，4次方程式の折紙による解法の簡明な表現法につながるか，さらに検討を行う．
- Lang による double fold を用いた角の5等分の方法に証明を与えた．
  5次方程式の解法に相当する他の例についても検討する．ベキ根による可解性と必要な折り目の数との関係を探る．

参 考 文 献

[1] 阿部恒: すごいぞ折り紙 – 折り紙の発想で幾何を楽しむ, 日本評論社, 東京, 2003. (初出：“数学セミナー” 1980 年 7 月号表紙).

[2] Alperin, R. C.: Mathematical Origami: Another View of Alhazen's Optical Problem, *Origami^3: Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, Monterey, A K Peters, 2002, 83–93. (邦訳 「折紙の数理と科学」 森北出版 2005).

[3] Alperin, R. C. and Lang, R. J.: One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms, *4OSME: The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education*, Pasadena, 2006.

[4] Beloch, M. P.: Sulla risoluzione dei problemi di terzo e quarto grado col metodo del ripiegamento della carta, *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari*, 1936.

[5] Buchberger, B.: *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal*, PhD thesis, Universität Innsbruck, 1965.

[6] Chou, S.-C.: *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D. Reidel, Dordrecht, 1988.

[7] Cox, D., Little, J., and O'Shea, D.: *Ideals, Varieties, and Algorithms (2nd ed.)*, Springer, N.Y., 1997. (邦訳 シュプリンガー・フェアラーク東京 2000).

[8] Demaine, E. D. and O'Rourke, J.: *Geometric Folding Algorithms*, Cambridge U. Press, N.Y., 2007.

[9] Edwards, B. C. and Shurman, J.: Folding Quartic Roots, *Mathematics Magazine*, **74**(1), 2001, 19–25.

[10] 藤崎源二郎: 体と Galois 理論 II, 岩波講座 基礎数学 6, 岩波書店, 東京, 1977.

[11] Geretschläger, R.: 折紙の数学 – ユークリッドの作図法を超えて, 森北出版, 東京, 2002. (深川英俊 訳).

[12] Ghourabi, F., Ida, T., and Takahashi, H.: Computational Origami of Angle Quintisection, *SCSS 2008*, *RISC-Linz Report Series*, **08-08**, 2008, 57–68.

[13] 羽鳥公士郎: 折り紙による作図, http://origami.ousaan.com/library/constj.html (参照 2009-01-09), 2003.

[14] Huzita, H.: Axiomatic Development of Origami Geometry, *Proc. of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Italy, Ferrara, 1989, 143–158.

[15] Huzita, H.: The Trisection of a Given Angle Solved by the Geometry of Origami, *Proc. of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Italy, Ferrara, 1989, 195–214.

[16] Huzita, H.: Right Angle Billiard Games and their Solutions by Folding Paper, *Origami Science & Art : Proc. of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami*, Japan, Otsu, 1994, 541–555.

[17] Justin, J.: Resolution par le Pliage de l'Equation du Troisieme Degré et Applications Geometriques, *Proc. of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, Italy, Ferrara, 1989, 251–261.

[18] Lang, R. J.: ORIGAMI, http://www.langorigami.com/ (参照 2009-01-08), 2004.

[19] Maplesoft: Maple 12 ユーザーマニュアル, Maplesoft, 東京, 2008.

[20] 森継修一: 折り紙による３次方程式の解法について, 日本応用数理学会論文誌, **16**(1), 2006, 79–92.

[21] 中村怜子: 代数方程式のガロア群と折紙による解法について, 筑波大学図書館情報メディア研究科修士論文, 2009.

[22] Rotman, J.: *Galois Theory (2nd ed.)*, Springer, N.Y., 1998. (邦訳 シュプリンガー・フェアラーク東京 2000).

[23] 佐々木元太郎: ユークリッド幾何, 現代数学レクチャーズ A-5, 培風館, 東京, 1979.

[24] 高木貞治: 代数学講義（改訂新版）, 共立出版, 東京, 1965.